# **第六单元 数列**

## **基础课31 数列的概念及其通项公式**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 数列的有关概念和简单表示法 | 了解 | 2023年新高考卷Ⅰ卷  2023年全国甲卷（理）  2023年北京卷  2021年新高考Ⅰ卷  2021年新高考Ⅱ卷 | ★★★ | 逻辑推理  数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，一般以选择题或填空题的形式出现，属于中档题，命题热点是递推式或图表式的数列有关问题.预计2025年高考命题情况变化不大，但应加强对创新问题的关注 | | | |

### **基础知识·诊断**

#### **夯实基础**

##### **一、数列的有关概念**

|  |  |
| --- | --- |
| 概念 | 含义 |
| 数列 | 按照①确定顺序排列的一列数 |
| 数列的项 | 数列中的②每一个数 |
| 数列的通项 | 数列的第项 |
| 通项公式 | 如果数列的第项与③序号之间的对应关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫作这个数列的通项公式 |
| 前项和 | 把数列从第1项起到第项止的各项之和称为数列的前项和，记作，即④ |

##### **二、数列的分类**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 分类标准 | 类型 | 满足条件 | |
| 项数 | 有穷数列 | 项数⑤有限 | |
| 无穷数列 | 项数⑥无限 | |
| 项与项间的大小关系 | 递增数列 | ⑦ | 其中 |
| 递减数列 | ⑧ |
| 常数列 |  |
| 摆动数列 | 从第二项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项 | |

##### **三、数列的表示方法**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 列表法 | | 列表格表示与的对应关系 |
| 图象法 | | 把点⑨画在平面直角坐标系中 |
| 公式法 | 通项公式 | 数列的通项使用表示的方法 |
| 递推公式 | 使用初始值和或,和表示数列的方法 |

###### **知识 拓展**

1.在数列中，若最大，则；若最小，则.

2.若数列的前项和为,通项公式为,则.

3.若，则为周期数列，为的一个周期.

4.数列通项公式的注意点

（1）并不是所有的数列都有通项公式；

（2）同一个数列的通项公式在形式上未必唯一.

#### **诊断自测**

##### **题组1 走出误区**

1. 判一判.（对的打“√”，错的打“×”）

（1） 一个数列中的数是不可以重复的.( × )

（2） 数列的通项公式的表达式是唯一的.( × )

（3） 数列的第项为.( √ )

（4） 任何一个数列不是递增数列，就是递减数列.( × )

2. （易错题）已知，且对于任意的，数列是递增数列，则实数 的取值范围是.

**【易错点】**本题容易忽视数列是特殊函数.

[解析]因为是递增数列，所以对任意的，都有，即，整理得，即. 因为，所以，要使不等式恒成立，只需.

##### **题组2 走进教材**

3. （人教A版选修改编）已知数列的首项，，且，若数列单调递增，则的取值范围为( C ).

A. . B. . C. D.

[解析]当,时，，因此有，两式相减得，说明该数列从第2项起，偶数项和奇数项都成等差数列，且它们的公差都是2，由可得,，因为数列单调递增，所以，即，解得.故选.

4. （人教A版选修（4）改编）设数列满足,，则该数列前2025项的乘积2.

[解析]令,则,由得.因为，所以，所以4是的一个周期.由，得,,，则，故.

##### **题组3 走向高考**

5. [2022·北京卷改编]已知数列的各项均为正数，其前项和满足，则为递减数列.（填“增”或“减”）

[解析]由题意可知，当时，由可得，又由，可得，所以数列为递减数列.

### **考点聚焦·突破**

#### **考点一 由与的关系求通项公式［师生共研］**

典例1 已知数列的前项和，那么它的通项公式.

[解析] 数列的前项和，

当时，；

当时，.

当时，上式也成立..

变式设问 若将本例中的条件“”改为“”，则通项公式.

[解析]因为，所以.

当时，；

当时，，不满足上式.故.



**已知求的3个步骤**

1.利用求出.

2.用替换中的得到一个新的关系式，利用求出当时的表达式.

3.对当时的结果进行检验，看是否符合当时的表达式，若符合，则可以把数列的通项公式合写；若不符合，则应该分与两段来写.

##### **针对训练**

1. 已知数列的前项和为，且,，则.

[解析]因为，所以当时，，

两式相减得，即，所以，且符合上式，所以的通项公式为.

2. 设数列满足，则.

[解析]当时，.

， ①

， ②

由得，，.

当时，，不符合上式，.

#### **考点二 由数列的递推关系求通项公式［多维探究］**

##### **累加法角度1**

典例2 已知数列满足，，则数列的通项公式为.

[解析]因为，所以，则当时，, ,,,以上个等式累加得，因为,所以.当时，,满足上式.

故.



形如的递推关系，可用累加法求通项公式.

##### **累乘法角度2**

典例3 若数列满足,，则.

[解析]因为， ①

所以, ②

由得,即，

所以，所以.



形如的递推关系式可化为的形式，可用累乘法求通项公式.注意检验是否满足所求公式，若满足，则合并，若不满足，则写成分段形式.

##### **多维训练**

1. [2024·吉安模拟]已知数列的首项为1，且，则的最小值是( B ).

A. B. 1 C. 2 D. 3

[解析]由得，

所以，

则，显然当时,满足上式，所以，

当且仅当时，等号成立，因为，故取或时最小，又，所以的最小值为1.故选.

2. 若数列的首项,，则其通项公式.

[解析]由，得，所以，，， ，，

所以，所以，

因为，所以，

因为满足上式，所以.

#### **考点三 数列的性质［多维探究］**

##### **数列的单调性角度1**

典例4 设数列满足.若数列是正项递增数列，则的取值范围是.

[解析]若数列是正项递增数列，

则对于任意,，且，又，

所以,即，可得或（舍去）.故的取值范围是.



**解决数列的单调性问题的方法**

1.用作差比较法，根据的符号判断.

2.利用不等式的性质或放缩法判断数列是递增数列、递减数列还是常数列.

##### **数列的周期性角度2**

典例5 已知在数列中，，，且，则( A ).

A. 3 B. C. 6 D.

[解析]因为，，且，

所以，，

，，

，

所以是周期为6的数列，则.故选.



对于数列的周期性问题，先根据给出的关系式求出数列的若干项，再通过观察，归纳出数列的周期，进而求出有关项的值或前项和.

##### **数列的最值角度3**

典例6 若在数列中，，，则数列的最大项的值是4.

[解析]根据以及，可知，所以， ①

则， ②

由得，即，

因为，所以与同号，

又因为，且，

所以，所以数列为递减数列，

因此数列的最大项是，其值是4.



**求数列的最大项与最小项的常用方法**

1.将数列视为当时函数所对应的函数值，根据的类型作出相应的函数图象，或利用求函数最值的方法求出的最值，进而求出数列的最大（小）项.

2.通过通项公式研究数列的单调性，利用确定最大项，利用确定最小项.

##### **多维训练**

1. （多选题）已知数列的通项公式为，若数列为递减数列，则实数的值可以是( AB ).

A. 3 B. 2 C. D. 0

[解析]，由数列为递减数列知，对任意，，所以对任意恒成立，所以，结合选项知的值可以是2或3.故选.

2. [2024·广东统考]若数列满足，且，则数列的前2025项的和( C ).

A. B. C. D.

[解析]由题意知，，，，， ， 所以数列是周期为4的数列，.故选.

3. 若数列满足，，则的最小值为( A ).

A. B. C. D. 13

[解析]由题意可知，，

显然，满足上式,

则.

又在上单调递减，在上单调递增，且.

所以当时，；

当时，.故的最小值为.故选.